现在，我们也拥有大部分模拟水的装置。 我们的出发点是将水视为具有自由表面边界条件且与空气接触的流体。 主要的新积分是几何形状：自由表面条件使水可以改变形状，因此我们需要以某种方式跟踪或捕获该形状。

在进入之前，请注意术语：空气-水表面或边界通常也称为**界面[interface]**。本章的大部分内容是关于如何使用此界面的。

8.1 标记粒子和体素

我们将从最简单的水模拟器开始.在这里,我们将使用第5章中首先介绍的体素化压强求解,只需要我们将每个网格单元分类为流体（即水），空（即空气）或固体。虽然应该很容易识别固体单元，但是要确定何时将水由于速度场下的对流移动而流入或流出时是将单元切换为液体还是排空是棘手的部分。

一种可能性是定义水的初始水平集，并使用尖锐的三次插值对水进行平流。 但是，即使使用立方，这也往往会有很多问题。 溅水自然会产生薄的结构，而且正如我们之前所提到的，从根本上说，网格上的水平集不能可靠地处理比两个网格单元薄的结构。 无论水稀薄到哪里，它都倾向于很快从网格中消失，就像水在迅速蒸发一样。 在消失之前，液滴很少会移动超过几个网格单元。

这是我们转向**标记粒子[marker particles]**的地方,该标记粒子一直用于Harlow和Welch的开创性marker-and-cell论文中，该论文还引入了MAC网格[HW65]。我们通过发射水粒子以填充水体（大概由水平集定义）并将其视为水几何形状的采样开始模拟。如果在模拟过程中存在添加水的水源，我们也会从它们中排放粒子。在每个对流步骤中，我们都根据网格速度场移动粒子，以使它们自然地跟随水的流向–使用RK2或更好，就像我们对半拉格朗日轨迹进行的追踪一样。2最后，我们依次使用标记 标记哪些网格单元是压力流体的粒子求解：任何包含标记粒子的非固体单元都是水，默认情况下，其余的非固体单元都为空。

该算法可以通过将其想象到极限来从概念上证明是正确的，在该极限中，每个水分子都由标记颗粒识别：那么包含标记颗粒的网格单元集正是包含水的网格单元集。

这就提出了一个问题，即用标记颗粒进行采样的密度如何—显然每个分子一个都不可行！ 显然，每个水网格单元至少应有一个粒子,为避免对流过程中随机打开的流体中的间隙，我们可能希望至少将分辨率提高一倍：2D中每个单元四个粒子，3D中每个单元八个粒子.但是，超过两倍并不一定会带来很多改善：最终，这些粒子将以网格分辨率采样的速度移动，这限制了我们在水几何中可以预期的细节量.如果需要更高分辨率的几何图形，则还必须优化模拟网格.

正如我们在第7章中讨论的那样，最好以随机的抖动模式发射粒子，而不仅仅是规则的晶格。这对于水标记粒子而言非常重要：沿着一个轴压缩并沿着另一个轴拉伸的剪切流可以将规则的晶格变成奇怪的各向异性条纹状图案，而不是良好的均匀采样。 因此，我们至少需要抖动初始网格，就像在渲染中对采样模式进行抖动一样。

标记粒子方法最明显的第一个问题是渲染：最终，我们需要一个光滑的表面来描述水和空气之间的边界，但是现在我们只有大量的点填充水体积。 显然，我们不想简单地将充满水的体素渲染为块。

一种选择是构造包裹在粒子周围的平滑隐式表面.例如,布林[Bli82]引入了大对象[blobbies]：给定粒子的位置，

其中是合适的平滑核函数,是旨在作为每个粒子范围的用户参数.高斯可能是的合理选择.更便宜,更简单的替代方法是样条线,例如

该样条曲线的优点是它仅取决于,而不取决于,从而避免在时求平方根.通常应为粒子平均间距的几倍,例如,但可以根据需要进行调整.(对于我们建议的采样,是栅格间距的一半).隐式曲面定义为点,其中对于某些阈值,.的合理默认值是,它将为孤立的粒子生成半径为的球体,但这也是可调整的参数.

不幸的是，过大的表面可能有明显的人工痕迹，其中最主要的是它看起来很过分。 许多水的情况包括大量的光滑水。 在对粒子进行采样然后将粗糙的表面包裹在粒子周围之后，通常每个粒子都会出现凹凸。 尽管可以用泡沫或喷雾掩盖，但从水表面的镜面反射中尤其明显。 可以通过增加h参数在某种程度上平滑凹凸，但是，这也会平滑甚至消除我们想要在渲染中看到的小尺寸特征。 通常，需要进行艰难的权衡.

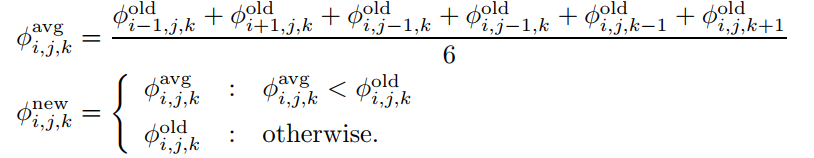
Zhu和Bridson [ZB05]对blobbies进行了改进，其中隐式表面函数为

其中是附近粒子的权重均值:

是附近粒子半径的权重均值:

现在,我们将所有粒子半径设为相同的,尽管如果粒子的半径实际上是其到所需水表面上最近点的距离,则可以获得更好的结果-参见Adams等人[APKG07]的论文提供了有关如何使用类似于Corbett[Cor05]的基于点的快速行进算法来实际计算此值的示例.最后,将曲面定义为,即等值零或等高线组.再次,对于孤立的粒子,这给出了半径为的完美球体.与常规blobblob相比,此公式的优势在于,在颗粒应采样为平滑几何体的情况下,它可以提供更平坦,更平滑的结果,并且对采样的不均匀性较不敏感:但是,这样做的缺点是可能会在颗粒分布的凹陷(间隙)中引入小规模的“箔条”.在网格上进行采样并进行少量平滑可能会有所帮助.

一个更快且通常相当不错的选择是简单地取一个球，然后在网格上采样并变成一个水平集.如第4章所述,可以通过计算到网格上的粒子的距离来有效地做到这一点,然后从该距离中减去粒子半径(通常仅比网格像元大小Δx小一点)以按半径扩大这些点 河 即使外部条件良好，内部在这一点上通常也距离符号距离较远：在φ<0的情况下需要进行重新平衡。然后，可以使用例如平滑核或填充孔的步骤进一步处理得到的水平集 其中且仅当φi，j，k用其邻居的平均值替换时：



这将导致像填充收缩包裹一样填充小孔，但不会侵蚀表面：如果长时间迭代，其极限行为是重建原始水准集合的凸包，因此可以考虑进行一到两次迭代 “局部”凸包操作。

虽然可以通过射线追踪水位集（无论是通过采样浮点函数还是使用球工会构造创建的），但通常都需要构建网格来近似表面，如我们在第4章中所述， 可能会运行进一步的网格整流罩算法以提高结果的质量，或者通过平均缩小结果以使其更接近底层水粒子。 然后可以非常有效地渲染这些网格。

近年来采取的一个令人振奋的方向是跳过水平集结构，直接使用三角形网格跟踪水面。乍看之下，通过速度场平移网格并不比平移粒子更困难-就像使粒子一样移动顶点-会出现一些问题。首先，流动会使网格显着变形，将某些三角形拉伸得太大或将其他三角形压缩得太小，因此需要重新网格化操作，如果它们太大或太小，则将其细分或塌陷。其次，当水被挤压分离成一滴水，或者应该合并两部分水时，必须在网格连接中执行这些拓扑更改操作。最后，数值误差会导致网格与自身发生碰撞，并在不应该发生的情况下自动相交。要有效地解决所有这些问题非常困难！有几种方法可以尝试[BB06，BB09，M¨09，BBB10，WTGT10，WMFB11，DBG14]。他们的承诺是为细小的特征（例如薄片和微妙的波纹）提供更高质量的跟踪，但是它们还没有像标记粒子方法那样经过“实战测试”，因此在这里我将不做进一步介绍。

回到标记粒子：如果我们使用粒子来追踪水的位置，我们也可以从中获得全部收益，并使用FLIP代替半拉格朗日方法进行速度对流。 这导致了一个模拟步骤，如下所示：

* 从粒子中为流体构建水平集.
* 将速度（和任何其他附加状态）从粒子传递到网格，并从已知的网格值外推到流体周围的至少一个网格单元，从而给出初步的速度场.
* 向速度场添加诸如重力或艺术控制之类的物体力.
* 构造固体水平集和固体速度场.
* 解决并施加压力以获得尊重固体边界的无散度速度.
* 通过对网格更新进行插值来更新粒子速度，以添加到现有的粒子速度（FLIP），或者简单地对网格速度（PIC）进行插值，或者对其进行混合.
* 通过无散度速度场对流粒子.

8.2 更准确的压强求解

到目前为止，我们开发的方法在视觉上的合理性方面还很不足。罪魁祸首是自由表面边界条件p = 0的体素化处理。即使我们可以跟踪并渲染准确的水表面，到目前为止，模拟的核心（压力求解）只能看到块状体素化的曲面，其中包含一些单元标为水，有些标为空气。因此，速度场以及表面本身的运动和形状不能避免明显的体素伪像。例如，小于一个网格单元高的小“波纹”在压力求解中根本不会出现，因此它们不能正确演化，而是以奇怪的位移纹理的形式静态持久。我们需要以某种方式告知压力求解有关每个网格单元中水-空气界面的位置的信息。更确切地说，我们将修改如何计算水-空气界面附近的压力梯度以更新速度，这自然也会改变压力方程中的矩阵。

标准解决方案是使用Gibou等人[GFCK02]提出的鬼流体方法。我们将通过查看的更新来说明这一点，在水内部

进一步假设在水中,即,并且在空气中，即(处理相反的情况将很明显).然后,将简单求解器设置为.但是,更准确地说在水-空气界面处p = 0，该位置介于和.在和之间进行线性插值可得出界面的位置,其中

在实值压强和虚拟压强之间的作线性差值,使其在界面上等于0,即

现在代入到速度更新:

矩阵的最终效果是增加对角线.在这一点上,您可能会担心或非常接近零的情况-我们正在除以该量!但是,这是一个“安全”的情况,因为增大矩阵的对角线可使其更易于求解,并且（在进行不完全的Cholesky预处理之后）具有更好的条件.尽管如此,为了限制数值奇异的可能性,将压力更新和矩阵中的系数限制为某个最大值仍然是明智的做法，例如 1000.

一个更相关的解决方案（更符合我们已经广泛使用的体积分数方法）是改为修改流体密度ρi+ 1/2，j，k，以考虑水与空气。忽略固体，将ρi+ 1/2，j，k计算为u单元中的平均流体密度。实际上，上述幻影流体方法等效于使用ρair= 0并仅根据φi，j，k和φi+ 1，j，k估算体积分数。实际上，我们可以跟踪空气中的速度场，或者在每个步骤中使用水势的平滑外推法，并使用真正的非零空气密度来求解水和空气中的压力。尽管可以正确获取所有详细信息，但这将导致一个完整的两相流模拟器。平流，水平集估计等需要做很多工作：例如，有关将FLIP扩展到水和空气混合物的方法，请参见Boyd和Bridson的文章[BB12]。解决整个水和空气中的压力会产生更硬的线性系统，但这确实意味着空气中的隐含速度场将没有散度，因此，尤其是气泡将不可压缩，从而可保留气泡的体积而不是因为气泡而塌陷使用通常的p = 0自由表面条件。实际上，正如Patkar等人所言，人们可以走得更远，并为控制气泡中空气可压缩性的热力学建模。显示[PAKF13]。

8.3 拓扑变化和墙体分离

至少从理论上讲，自由表面流最棘手的部分之一是如何发生分离。 假设水开始时是一个与路径相连的组件（意味着水中的任何两个点都可以通过仅在水域中连续路径相连），并且仅在连续速度场中平移，那么它必须保持与路径相连。 特别是，一滴水无法与其余的水分开：它始终会被不断稀释的卷须保持连接。

使用水平集和标记粒子方法，事实证明这在实践中不成问题：液滴自然分离。 但是，该理论向我们表明，这实际上只是数值误差，这是因为我们仅在有限的一组网格点和/或粒子上对液体的存在进行采样。 不幸的是，没有一个简单的解决方案可以解决此问题，因为拓扑更改（分离，合并）的实际物理方法尚未在连续体级别上正确建模。 因此，我们将在一个不眠之夜中将这个问题留给我们担心。

值得一提的是，就拓扑结构的变化而言，水合并也会引起一些麻烦。 在低速下，尤其是相对于网格大小除以时间步长而言的较低速度下，由于我们使用水平集方法描述了压力求解的几何形状，因此两种水成分在它们进入彼此的一个网格单元的瞬间合并。 在飞溅的情况下，这甚至可能导致明显的体积增加。 但是，在高速下（相对于网格单元的高速度除以时间步长），我们可能遇到相反的问题：在平流过程中，水滴会非常深地渗入固体壁或另一个水区域，从而在此过程中实损失了体积。

另一个相关问题是液体如何与固体壁分离。实际上，空气，水和固体相遇的移动接触线所发生的确切情况仍未被完全理解。复杂的物理化学，包括过去的润湿（在固体上留下几乎不可见的水膜）的影响，正在发挥作用。清楚的是，我们的“不粘”边界条件〜u·nˆ =〜usolid·n prevents既可以防止水渗透到固体中，也可以防止其从固体表面分离。但是，无可否认，我们可以观察到水从表面分离，尽管通常会留下水滴或湿膜。同样，在实践中，使用标记粒子时，我们发现数值误差使水可以相当自然地分离，同时还可以对水与固体的内聚力进行建模，这在小规模下看起来相当合理。但是，分离的时间确实和网格物理地和时间步长地严重地和非物理地相关，并且在大范围内，内聚度看起来是不自然的。 Foster和Fedkiw [FF01]提出了一个简单的不粘手技巧，仅强制执行〜u·nˆ≥〜usolid·nˆ，不幸的是，在几种常见情况下该方法都失败了；巴蒂等。 [BBB07]后来展示了一种更坚固，物理上一致的，尽管昂贵的治疗方法，该方法受到接触问题的启发，将不等式约束扩大到压力的互补状态（因此，压力不能超过实体壁的临界吸力）。 Chentanez和Muller说明了如何使用多重网格[CMF12]有效解决此问题。

8.4 体积控制

在压力的迭代求解，水平集表示中的截断错误和对流错误之间以及上述拓扑变化问题之间，典型的水模拟不能完全节省开始时的水量就不足为奇了。 通常，这些误差会偏向于稳定地减少音量，但是也会出现明显的音量增加。 Kim等人[KLL + 07]通过在压力投影步骤中执行非零发散控制，演示了对此漂移的简单校正，类似于在加热烟雾时如何强制膨胀。

8.5 表面张力

我们仅简要谈及的另一个主题是为小规模水现象增加表面张力。应该警告，这是图形和科学计算领域正在进行的研究的主题。例如，令人惊讶的是，在静止状态下很难正确地以零重力运行一个水球并具有表面张力的测试案例（这将导致表面张力完全抵消压力，因此速度保持为零）。

表面张力的物理化学原理上很简单.水分子比空气分子更容易吸引其他水分子，反之亦然。 因此，靠近表面的水分子倾向于被拉向其余的水分子，反之亦然。 他们正在设法以最小的方式使暴露于其他流体的面积最小化，从而聚集在自己的类型周围。 实际上，最简单的表面张力线性模型可以用势能表示，该势能等于表面张力系数乘以两种流体之间的表面积(正常条件下,水和空气的约为).该力试图使表面积最小.

流体的表面积只是边界上1的积分:

记住我们的符号距离属性，这与

现在我们反向使用散度定理，将其转化为体积积分:

考虑表面的虚拟无限小位移δx。 这通过沿边界增加或减去无穷小被积数来更改体积积分。 表面积的无穷小变化为

…

为了缓解严格的时间步长限制，存在两种有趣的可能性。 一种是使表面张力处理在时间上更加隐含，解决流体运动，该运动将同时不可压缩，并起到最小化表面积（与惯性平衡）的作用。 Misztal等人用四面体网格离散流体。 已经展示了这种方法[MEB + 12]的强大功能，但是如何最好地将这种想法整合到更常规的水求解器中仍未解决。 另外，与使用有限的曲率差异估计相比，Sussman和Ohta [SO09]展示了对表面张力的更稳定的评估：本质上，他们在设定的水平上运行了一定时间的平滑PDE，并测量了差异 在水平设置值中获得更稳定的曲率估计。